第一章　预备知识

§1.1 集合
§1.2 关系
§1.3 逻辑

§1.1　集合

内容提要: 集合；基数；映射；康托理论介绍.

首先回顾一下集合的基本常识.

集合是数学中不加定义的原始对象，通常有两种记法：

列举式记法: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

描述性记法: $[0,1] = \{\, r \in \mathbb{R} \mid 0 \le r \le 1 \,\} = \{\, r \mid r$ 是实数且 $0 \le r \le 1 \,\}$.

设 A, B 是两个集合. 如果对任 $a \in A$ 有 $a \in B$, 就说 A 是 B 的 子集, 记作 $A \subseteq B$, 或 $B \supseteq A$; 也说成： A 包含于 B, 或说 B 包含 A.

如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 那么它们就是同一个集合，记作 $A = B$.

如果 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$, 就说 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneq B$.

$A \cup B := \{\, c \mid c \in A$ 或 $c \in B \,\}$, 称为 A 与 B 的 并集.

$\bigcup_{i \in I} A_i := \{\, a \mid$ 存在 $i \in I$ 使得 $a \in A_i \,\}$.

$A \cap B := \{\, c \mid c \in A$ 且 $c \in B \,\}$, 称为 A 与 B 的 交集.

$\bigcap_{i \in I} A_i := \{\, a \mid$ 对任 $i \in I$ 有 $a \in A_i \,\}$.

基本运算律.

$A \cap B \subseteq A,\ \ A \cup B \supseteq A\ ,\ A - B \subseteq A.$

交换律:　$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$

结合律:　$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$

幂等律:　$A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$

吸收律:　$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A.$

分配律:　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$

德摩根律:　$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C), \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C).$

集合 S 的 幂集: $\mathcal{P}(S) := \{\, A \mid A \subseteq S \,\}$.

对 $A \in \mathcal{P}(S)$, 记 $\overline{A} := S - A$, 称为 A 在 S 中的 补集.

$A \times B := \{\, (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \,\}$, 称为 A 与 B 的 卡氏积 *(Cartisian product)*, 或称集合积.

集合 A 中元素的个数称为集合 A 的 基数, 记作 $|A|$. 　如果 $|A|$ 是无限的，记作 $|A| = \infty$, 称 A 是无限集. 如果 $|A|$ 是有限的，则记作 $|A| < \infty$, 称 A 是有限集.

集合 A 到集合 B 的一个映射 f 是一个对应法则使得对任 $a \in A$ 有唯一一个 $b \in B$ 与 a 对应；记这个唯一的 $b := f(a)$. 映射简记为 $f : A \to B$, $a \mapsto f(a)$; 其中 A 称为映射 f 的 *定义域 (domain)*, B 称为映射 f 的 *值域 (codomain)*.

此时，对 $A' \subseteq A$, $f(A') := \{\, f(a') \mid a' \in A' \,\}$ 称为 A' 的 *象 (image)*; 特别， $f(A)$ 称为 f 的 *象 (image)*. 对 $B' \subseteq B$, $f^{-1}(B') := \{\, a \in A \mid f(a) \in B' \,\}$, 称为 B' 的 *源象 (inverse image)*; 特别， $f^{-1}(B)$ 称为 f 的 *源象*.

如果映射 $f : A \to B$ 满足：对任 $b \in B$ 存在 $a \in A$ 使得 $b = f(a)$, 则称 f 是 *满射*.

如果映射 $f : A \to B$ 满足：对 $a \neq a' \in A$ 有 $f(a) \neq f(a')$, 则称 f 是 *单射*.

如果映射 $f : A \to B$ 既是单射也是满射，就称 f 是 *双射*.

如果映射 $f : A \to B$ 满足：存在映射 $g : B \to A$ 使得 $gf = \mathrm{id}_A$ 且 $fg = \mathrm{id}_B$, 则称 f 是 *可逆映射*, 称 g 是 f 的 *逆映射 (inverse)*, 记作 f^{-1}.

命题. *映射 $f : A \to B$ 是双射当且仅当 f 是可逆映射.*

证. 设 f 可逆. 对任 $b \in B$, 有 $f(g(b)) = (fg)(b) = \mathrm{id}_B(b) = b$; 即 f 是满射. 若 $f(a) = f(a')$, 则 $a = \mathrm{id}_A(a) = (gf)(a) = g(f(a)) = g(f(a')) = \mathrm{id}_A(a') = a'$; 即 f 是单射.

设 f 是双射. 对任 $b \in B$ 存在唯一一个 $a \in A$ 使得 $f(a) = b$, 记此惟一 a 为 $g(b)$. 那么定义了一个映射 $g : B \to A$, $b \mapsto g(b)$, 使得 $f(g(b)) = b$, $\forall\, b \in B$. 又对任 $a \in A$,

$$f(g(f(a))) = (fg)(f(a)) = f(a)$$

但 f 是单射，得 $g(f(a)) = a$, $\forall\, a \in A$. 所以 f 可逆. $\square$

以上的陈述使用的是朴素集合语言. 但是朴素集合语言会产生悖论.

1 Berry 的悖论 (1906, G.G. Berry). 令

$$D = \{\, n \mid a \text{ 是可用不多于 50 个字母的一句话概定的正整数} \,\}.$$

则 $D \neq \emptyset$, 如 $1 \in D$ 因为 $1 =$ “the leat positive integer”, $3 =$ “the second prime number”, 等等. 但是只有有限个构作语言的字母，因此 “不多于 50 个字母” 构做的 “一句话” 只有有限句；故 D 是有限集；因此有正整数不在 D 中. 令

$$e = \text{“the least positive integer which is not in } D\text{”}$$

那么按这一行字和 D 的定义得 $e \in D$; 但这与 e “is not in D” 相矛盾.

2 罗素悖论 (1902, B. Russell). 令 $A = \{\, a \mid a \notin a \,\}$ (即 A 是以所有这样的集合为成员的集合，这些集合不以自己为成员). 问： A 是 A 的成员吗？

若 $A \in A$, 按 A 的定义有 $A \notin A$.

若 $A \notin A$, 按 A 的定义有 $A \in A$.

罗素用生活故事把他的论证讲述为 “理发师悖论”:

一个小岛上有一个理发师 A 说他“为而且只为小岛上所有不给自己理发的人理发”.

有人 B 问他“你给你自己理发吗？” 理发师 A 答：“不.”

B 说：“按你的说法你该给你自己理发.” 理发师 A 只得说：“那就给我自己理吧.”

B 说：“按你的说法你就不得给你自己理发.” 理发师无语.

为解决这些悖论,发展了公理集合论;从 Ernst Zermelo(1908) 和 Abraham Fraenkel(1922) 产生了 Zermelo-Fraenkel 公理系统 (ZF 公理).

关于集合的基数，前面说的“元素个数”也是使用的朴素语言.

设 A, B 是集合. 如何比较 A, B 的元素个数多少？

如果有单射 $f : A \to B$, 我们就说 A 的 *基数 (cardinality)* 不大于 B 的基数，记作 $|A| \le |B|$.

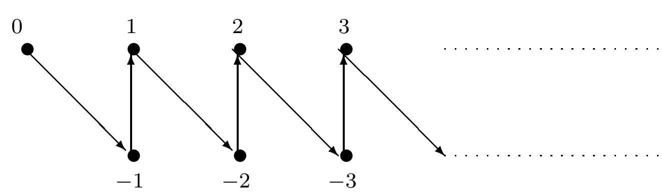
如果有双射 $f : A \to B$, 我们就说 A 的基数等于 B 的基数，记作 $|A| = |B|$.

怎么计数 A 的元素？实际中这样数： 1, 2, $\cdots$; n 步后数完了，就说 A 有 n 个元，记作 $|A| = n$. 否则就说 A 有无数个元， i.e. $|A| = \infty$.

但是有两类不同的无限基数. 有时候数学家也可以按自然数的结构，把 A 的元素“一个一个数完”, 也就是说 $\mathbb{N}$ 到 A 存在双射，我们就说 A 是 *可列举的 (is listed)*, 更常用说法是：称 A 是 *可数的 (countable)*. 按定义 $\mathbb{N}$ 是可数的. 整数集合 $\mathbb{Z} = \mathbb{N}\bigcup\{-1, -2, \cdots\}$ 也是可数的，可以这样列举：

$$\mathbb{Z} = \{\ 0, -1, 1, -2, 2, -3, \cdots\ \}$$

图示：



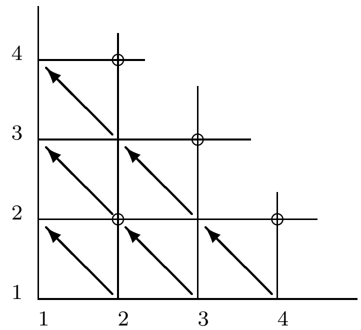
这个例子同时说明：

结论. *只要 A 和 B 都是可数的则并集 $A\bigcup B$ 也是可数的.*

另一典型例子：有理数集合 $\mathbb{Q}$ 是可数的. 有了上面的结论，只要证明正有理数集合 $\mathbb{Q}^+ = \{\ \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} - \{0\}\ \}$ 可数. 可以这样列举：

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{\ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left(\frac{2}{2} = \frac{1}{1}\text{skipped}\right), \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \cdots\ \right\}$$

图示：



这个例子同时说明：

结论. *只要 A 和 B 都是可数的则卡氏积 $A \times B$ 也是可数的.*

但是，康托 (Cantor) 发现： 0 与 1 之间的实数集合 $[0,1]$ 是不可数的．他论证如下：首先注意 $[0,1]$ 的任何元可以表示为真十进小数 $0.d_1d_2d_3\cdots$, 其中每个 $d_i \in D := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$; 如：

$$0 = 0.000\cdots\ , \qquad 1 = 0.999\cdots\ , \qquad \log 2 = 0.301\cdots$$

反证法．假若 $[0,1]$ 可列举为

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \tag{L}$$

那么，康托说：

— 对 $a_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13}\cdots$ 取 $c_1 \in D$ 使 $c \neq d_{11}$;

— 对 $a_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23}\cdots$ 取 $c_2 \in D$ 使 $c \neq d_{22}$;

— 依此继续

— 假设对 $a_n = 0.d_{n1}d_{n2}d_{n3}\cdots$ 已取了 $c_n \in D$ 使 $c_n \neq d_{nn}$, 那么对 $a_{n+1} = 0.d_{n+1,1}d_{n+1,2}d_{n+1,3}\cdots$ 取 $c_{n+1} \in D$ 使 $c_{n+1} \neq d_{n+1,n+1}$.

按数学归纳法，对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有了 $c_n \in D$ 使 c_n 与 a_n 的小数第 n 位 d_{nn} 不同． 令 $c = 0.c_1c_2c_3\cdots$, 这是一个真小数，即 $c \in [0,1]$, 于是 c 就是列举 (L) 中的一个，设 $c = a_k$, $k \in \mathbb{N}$; 但是小数 c 的第 k 位 c_k 与小数 a_k 的第 k 位 d_{kk} 不同，因而 $c \neq a_k$. 这是矛盾.

结论. *集合 $[0,1]$ 是不可数的；即 $|[0,1]| \gneqq |\mathbb{Q}|$.*

康托用这严格的论证告诉人们有本质上不同的 “无限”: *可数的 (countable)*, 和 *不可数的 (uncountable)*; 可数的无限是最小的无限.

注. (1) 把 $[0,1]$ 中的数 r 表达为小数时也可用二进制，即 $r = 0.d_1d_2d_3\cdots$ 其中每个 $d_i \in \{0,1\}$; 那么 r 对应于 $\mathbb{N}$ 的子集 $R = \{\, k \in \mathbb{N} \mid d_{k+1} = 1 \,\} \subseteq \mathbb{N}$; 显然， $\mathbb{N}$ 的任何子集对应于一个真二进小数．所以 $|[0,1]| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. (正因为如此，集合 A 的幂集 $\mathcal{P}(A)$ 也记作 $2^A := \{\, f : A \to \{0,1\} \,\}$.)

(2) 如果把列举 (L) 的小数表达列为下述 (无限) 矩阵：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{d}_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} & \cdots \\
d_{21} & \mathbf{d}_{22} & \cdots & d_{2n} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
d_{n1} & d_{n2} & \cdots & \mathbf{d}_{nn} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

那么会发现选取 $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ 时正好是对应于这个矩阵的对角线，使得对应元不相等. 所以上述论证称为 *对角线论证 (diagonal argument)*.

类似地可证明：

康托定理 (1873). *对任一集合 A 有 $|A| \lneqq |2^A|$.*

证. 习题.

注. 最小的无穷基数是可数无穷 $|\mathbb{N}|$, 康托记它为 $\aleph_0$. 他记 $|2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} =: \aleph_1$. 康托的定理说 $\aleph_0 \lneqq \aleph_1$. 但是康托始终没有发现真正处于 $\aleph_0$ 与 $\aleph_1$ 之间的基数. 他 (1878 年) 猜想这样的基数确实不存在，这就是下述 *连续统假设 (Continuum Hypothesis)*, 也称为 *康托猜想*.

连续统假设. *不存在集合 A 使得 $\aleph_0 \lneqq |A| \lneqq \aleph_1$.*

1900 年在巴黎第二届国际数学家会议上希尔伯特 (David Hilbert) 提出的 23 个数学问题中，连续统假设是第一个. 1939 年，奥地利数学家哥德尔 (Kurt Gödel) 证明了连续统假设与 ZF 公理是相容 (即在 ZF 公理系统中证明不出连续统假设不对，或者说连续统假设与 ZF 公理不矛盾). 1963 年，美国数学家柯亨 (Paul Cohen) 证明了连续统假设与 ZF 公理是独立的 (即在 ZF 公理系统中证明不出连续统假设正确).

习题 1.1

1. 存在单射 $f : A \to B$ 当且仅当存在满射 $g : B \to A$.

2. 单射的合成映射是单射，满射的合成映射是满射，双射的合成映射是双射.

3. 设 $f : A \to B$ 和 $g : B \to C$ 是映射. 证明：
(1) 如果 gf 是满射那么 g 是满射.
(2) 如果 gf 是单射那么 f 是单射.

4. 证明康托定理： *对任一集合 A 有 $|A| \lneqq |2^A|$.*

(**提示**. 设 $f : A \to \mathcal{P}(A)$; 令 $B = \{\, b \in A \mid b \notin f(b) \,\} \in \mathcal{P}(A)$; 若 $B = f(a)$, 问 a 是否在 B 中会产生罗素悖论；故 $B \notin f(A)$. 即 f 不是满射.)

§1.2 关系

内容提要: 关系；等价关系与划分；映射基本定理.

定义. 集合 A 的卡氏积 $A\times A$ 的一个子集 $\sim\subseteq A\times A$, 称为集合 A 上的一个 关系; 对 $a,b\in A$, 如果 $(a,b)\in\sim$ 就记作 $a\sim b$, 称 a 与 b 具有关系 $\sim$; 否则记作 $a\not\sim b$, 称 a 与 b 不具有关系 $\sim$.

两种常见重要关系.

定义(偏序关系). 集合 A 上的关系 $\preceq$ 称为一个 偏序关系 如果以下三条满足:

自反律: 对任 $a\in A$, 有 $a\preceq a$;

传递律: 对任 $a,b,c\in A$, 如果 $a\preceq b$ 且 $b\preceq c$, 则 $a\preceq c$;

反对称律: 对任 $a,b\in A$, 如果 $a\preceq b$ 且 $b\preceq a$, 则 $a=b$.

例. $\mathbb{R}$ 的小于等于关系 "$\le$".

$\mathcal{P}(A)$ 的包含关系 $\subseteq$.

定义. 带一个偏序关系 "$\le$" 的集合 A 称为 偏序集 *(partial ordered set)*. 如果 A 的任意两元 a,b 可比较 (即或者 $a\le b$ 或者 $b\le a$), 则称 A 是 全序集 *(total ordered set)*.

偏序集 A 中元素 a_0 称为 极大元 *(maximal element)* 如果没有元素真大于 a_0, 即只要 $a_0\le a$ 就必有 $a_0=a$. 类似地定义 极小元 *(minimal element)*.

偏序集 A 中 $a_1\le a_2\le a_3\le\cdots$ 称为一个 升链 *(ascending chain)*.

下述断言作为公理.

Zorn's Lemma. 设 A 是偏序集. 如果 A 的任何链都有上界, 则 A 有极大元.

定义(等价关系). 集合 A 上的关系 $\sim$ 称为一个 等价关系 如果以下三条满足:

自反律: 对任 $a\in A$, 有 $a\sim a$;

传递律: 对任 $a,b,c\in A$, 如果 $a\sim b$ 且 $b\sim c$, 则 $a\sim c$;

对称律: 对任 $a,b\in A$, 如果 $a\sim b$ 则 $b\sim a$.

在此情形, 称 A 的子集 $[a]=\{\,b\in A\mid b\sim a\,\}\subseteq A$ 是 a 所在的 等价类; 以等价类为成员的集合称为集合 A 关于等价关系 "$\sim$" 的 商集, 记作 $A/\sim$. (故 $A/\sim\ \subseteq\ \mathcal{P}(A)$.)

例. 一个学校学生的 "同班" 关系是等价关系；学生张三所在的等价类就是张三所在的班；商集 "学生集合 / 同班" 就是班级的集合.

定义(集合的划分). 集合 A 的幂集的子集 $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(A)$ 称为 A 的一个 划分 如果以下三条满足:

非空: $T\ne\emptyset$ 对任 $T\in\mathcal{T}$;

不交: $T\bigcap T'=\emptyset$ 对任 $T\ne T'\in\mathcal{T}$;

覆盖: $\bigcup\limits_{T\in\mathcal{T}}T=A$.

在此情形，规定 $a \sim_{\mathfrak{T}} b$ 如果存在 $T \in \mathfrak{T}$ 使得 a 与 b 都在 T 中.

等价关系与划分的定理. 设 A 是集合.

(1) 如果 "$\sim$" 是 A 的等价关系，则商集 $\mathfrak{T} := A/\sim$ 是 A 的一个划分；且 $\sim_{\mathfrak{T}} = \sim$.

(2) 如果 $\mathfrak{T}$ 是 A 的一个划分，则 "$\sim_{\mathfrak{T}}$" 是 A 的等价关系，且商集 $A/\sim_{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}$.

证. (1). 先证明商集 $\mathfrak{T} = A/\sim$ 是 A 的一个划分. 对任 $[a] \in \mathfrak{T}$, 因 $a \sim a$, 由等价类定义得 $a \in [a]$. 从而 $[a] \neq \emptyset$. 即 $\mathfrak{T}$ 的每个成员是 A 的非空子集.

设 $[a], [a'] \in \mathfrak{T}$ 使得 $[a] \cap [a'] \neq \emptyset$, 则有 $b \in [a] \cap [a']$, 那么 $b \sim a$ 且 $b \sim a'$. 由 $b \sim a$ 可得：$[b] = \{ c \in A \mid c \sim b \} = \{ c \in A \mid c \sim a \} = [a]$. 同理，$[b] = [a']$. 所以 $[a] = [b] = [a']$. 即 $\mathfrak{T}$ 的任两个不同成员不相交.

任 $a \in A$, 如上已证， $a \in [a] \subseteq \bigcup_{[b] \in \mathfrak{T}} [b]$. 即 $A \subseteq \bigcup_{[b] \in \mathfrak{T}} [b]$.

再证明 $\sim_{\mathfrak{T}} = \sim$, 即要证：对 $a, b \in A$, $a \sim_{\mathfrak{T}} b \iff a \sim b$.

设 $a \sim_{\mathfrak{T}} b$, 即存在 $T \in \mathfrak{T}$ 使得 $a, b \in T$; 但 $T = [c] \in A/\sim$ 对某 $c \in A$, 即 $a, b \in [c]$; 按等价类定义， $a \sim c$ 且 $b \sim c$, 从对称律和传递律得， $a \sim c \sim b$.

反过来，设 $a \sim b$. 那么 $a \in [b]$; 而 $b \in [b]$; 即 $[b] \in \mathfrak{T}$ 使得 $a, b \in [b]$; 按定义，得 $a \sim_{\mathfrak{T}} b$.

(2). 先证明 $\sim_{\mathfrak{T}}$" 是 A 的等价关系. 对任 $a \in A$, 因为 $\bigcup_{T \in \mathfrak{T}} T = A$, 存在 $T \in \mathfrak{T}$ 使得 $a \in T$, 即 $a, a \in T$; 所以 $a \sim_{\mathfrak{T}} a$. 自反律成立.

按照关系 $\sim_{\mathfrak{T}}$ 的定义，对称律显然成立.

设 $a \sim_{\mathfrak{T}} b$ 和 $b \sim_{\mathfrak{T}} c$; 就是存在 $T, T' \in \mathfrak{T}$ 使得 $a, b \in T$ 和 $b, c \in T'$; 那么 $b \in T \bigcap T'$, 所以 $T \bigcap T' \neq \emptyset$; 而 $\mathfrak{T}$ 的任不同成员作为 A 的子集没有公共元，故 $T = T'$. 于是 $a, c \in T$, 即 $a \sim_{\mathfrak{T}} c$. 传递律成立.

下面证明商集 $A/\sim_{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}$.

对任 $a \in A$, 由划分定义的第三条性质，存在 $T \in \mathfrak{T}$ 使得 $a \in T$; 再由第二条性质， a 不可能在 $\mathfrak{T}$ 的两个不同的子集之中；即： $\mathfrak{T}$ 中有唯一一个成员，记作 T_a, 包含 a.

记 $[a]_{\mathfrak{T}}$ 是关于 $\sim_{\mathfrak{T}}$ 的等价类；而 $b \in [a]_{\mathfrak{T}}$, 就是 $b \sim_{\mathfrak{T}} a$, 按关系 $\sim_{\mathfrak{T}}$ 的定义，就是 b 与 a 在 $\mathfrak{T}$ 的同一个子集中；但 $\mathfrak{T}$ 中有唯一一个成员 T_a 包含 a, 故 $b \in T_a$; 证得 $[a]_{\mathfrak{T}} \subseteq T_a$. 反过来， $c \in T_a$ 则 $c \sim_{\mathfrak{T}} a$, 从而 $c \in [a]_{\mathfrak{T}}$. 所以 $T_a \subseteq [a]_{\mathfrak{T}}$. 总之， $[a]_{\mathfrak{T}} = T_a$.

那么对任 $a \in A$ 有 $[a]_{\mathfrak{T}} = T_a \in \mathfrak{T}$; 得 $A/\sim_{\mathfrak{T}} \subseteq \mathfrak{T}$. 反之，对任 $T \in \mathfrak{T}$, 因为 $T \neq \emptyset$, 存在 $a \in T$; 则 $T = T_a = [a]_{\mathfrak{T}} \in A/\sim_{\mathfrak{T}}$ 所以 $\mathfrak{T} \subseteq A/\sim_{\mathfrak{T}}$. □

定义. 设 $\sim$ 是集合 A 的等价关系， $A/\sim$ 是等价关系的商集. 那么 $\rho_\sim : A \to A/\sim$, $a \mapsto [a]$, 是映射；称为关于等价关系 $\sim$ 的自然映射.

定义. 设 $f : A \to B$ 是映射. 对 $a, b \in A$, 如果 $f(a) = f(b)$ 则记 $a \sim_f b$. 那么 $\sim_f$ 是 A 的等价关系 (习题), 称为由映射 f 的 *核关系*.

定理 (映射基本定理). 设 $f : A \to B$ 是映射， $\rho_f : A \to A/\sim_f$ 是自然映射. 则

(1) 存在唯一映射 $\bar{f}: A/\sim_f \ \to\ B$ 使得 $f = \bar{f}\cdot\rho_f$.

(2) 上述 $\bar{f}$ 必为单射； $\bar{f}$ 是满射当且仅当 f 是满射.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_f"'] & B \\ A/\sim_f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

证. (1). 对 $[a] \in A/\sim_f$, 即 $\rho_f(a) = [a]$, 令 $\bar{f}([a]) = f(a) \in B$; 若 $[a] = [a']$, 则 $f(a') = f(a)$; 故定义 $\bar{f}([a]) = f(a)$ 与等价类 $[a]$ 的代表元 a 的选取无关. 得到映射：

$$\bar{f}:\ \ A/\sim_f\ \longrightarrow\ B\,,\quad [a]\ \longmapsto\ f(a)\,.$$

对任 $a \in A$,

$$\bar{f}\rho_f(a) = \bar{f}([a]) = f(a)\,;$$

即 $\bar{f}\rho_f = f$.

又，若 $f' : A/\sim_f \to B$, 也使得 $f'\rho_f = f$, 那么对任 $[a] \in A/\sim_f$ 有

$$f'([a]) = f'(\rho_f(a)) = f'\rho_f(a) = f(a) = \bar{f}([a])\,;$$

即 $f' = \bar{f}$.

(2). 设 $[a], [a'] \in A/\sim_f$ 使 $\bar{f}([a]) = \bar{f}([a'])$; 按 $\bar{f}$ 的定义，就有 $f(a) = \bar{f}([a]) = \bar{f}([a']) = f(a')$; 再按 $\sim_f$ 的定义，得 $a \sim_f a'$; 即 $[a] = [a']$. 所以 $\bar{f}$ 是单射.

因为 $\bar{f}\rho_f = f$ 而且自然映射 ρ_f 是满射; 所以当 f 是满射时 $\bar{f}$ 是满射 (见习题 1.1.3(1)); 当 $\bar{f}$ 是满射时 f 是满射 (见习题 1.1.2). □

习题 1.2

1. 设 $\sim$ 是集 A 的等价关系， $a, b \in A$. 证明：

(1) $a \in [a]$;

(2) $a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$.

2. 设 $f : A \to B$ 是映射. 如果 $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(f(A))$ 是 f 的象的一个划分，那么 $\{\, f^{-1}(T) \mid T \in \mathcal{T}\,\}$ 是 A 的一个划分. 特别， $\{\, f^{-1}(b) \mid b \in f(A)\,\}$ 是 A 的一个划分.

3. 设 $f : A \to B$ 是映射. 证明核关系 $\sim_f$ 是 A 的等价关系.

4. 称集合 A 的划分 $\mathcal{T}_1$ 小于划分 $\mathcal{T}_2$, 记作 $\mathcal{T}_1 \le \mathcal{T}_2$, 如果任何 $T_1 \in \mathcal{T}_1$ 包含在一个 $T_2 \in \mathcal{T}_2$ 之中.

(1) $\mathcal{T}_0 := \{\, \{a\} \mid a \in A \,\}$ 称为 A 的离散划分. 证明：离散划分是 A 的最小划分.

(2) 仅由一个子集 A 构成的 A 的划分 $\mathcal{T}_t := \{\, A \,\}$ 是 A 的最大划分.

5. 称集合 A 的等价关系 $\sim_1$ 小于等价关系 $\sim_2$, 记作 $\sim_1 \le \sim_2$, 如果只要 $a \sim_1 a'$ 就有 $a \sim_2 a'$.

(1) 证明：相等关系 “$=$” 是 A 的最小等价关系.

(2) 全集 $A\times A$ 决定的关系称为 A 的全关系. 证明：全关系是 A 的最大等价关系.

6. 证明：如果 A 的两个等价关系 $\sim_1$ 和 $\sim_2$ 满足 $\sim_1\ \le\ \sim_2$ 那么 $\sim_2$ 可以诱导商集 $A/\sim_1$ 的一个等价关系，记作 $\sim_2/\sim_1$, 使得对任 $a, a'\in A$, 把关系 $\sim_1$ 的等价类记作 $[a]_1$ 和 $[a']_1$, 则有：在 $A/\sim_1$ 中 $[a]_1\ (\sim_2/\sim_1)\ [a']_1$ 当且仅当在 A 中 $a\sim_2 a'$.

7. 设 $f: A\to B$ 和 $g: A\to C$ 是两个映射. 证明：存在映射 $\bar f: C\to B$ 使得 $f=\bar f g$ 当且仅当 $\sim_g\ \le\ \sim_f$. 且这样的 $\bar f$ 若存在则惟一，且 $\sim_{\bar f} = \sim_f/\sim_g$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C \arrow[ur, "\bar f"'] & \end{tikzcd}$$

§1.3 逻辑

内容提要: 逻辑断言；逻辑运算；真值；谓词.

简单介绍基本逻辑符号.

基本的陈述称为断言. 如：

a 是 A 的元素.

单射的合成是单射.

如果 A 的任何链有上界则 A 有极大元.

等等，都是断言. 可以用大写英文字母表示断言.

有几种方式把两个断言组合成一个新的断言. 例如，用 P 表示断言 “$a\in A$”, 用 Q 表示断言 “$b\in B$”; 那么 “P 或者 Q” 就是一个新的断言，它就是 “$a\in A$ 或者 $b\in B$”. 逻辑上把断言 “P 或者 Q” 记作 $P\vee Q$. 这样，$\vee$ 就是关于断言的 “运算”; 称为逻辑运算.

1.3.1 定义. 设 P, Q 是断言. 基本逻辑运算如下：

$P\vee Q$	读作	“P 或 Q”;
$P\wedge Q$	读作	“P 且 Q”;
$P \implies Q$	读作	“P 蕴涵 Q”;
$P \impliedby Q$	读作	“P 被 Q 蕴涵”;
$P \iff Q$	读作	“P 当且仅当 Q” (简记为 “P iff Q”);
$\neg P$	读作	“非 P” (就是 P 的否定).

注. 注意：这里 $\wedge$, $\implies$ 等，只是作为逻辑运算符号，把两个逻辑断言组成一个新的逻辑断言；它们在这里不是推理语言.

然而在数学著作中这些符号也常用作推理语言. 例如，这样一段推理：“因为 $a\in A$ 且 $A\subset B$, 所以 $a\in B$”; 有时候被写成这样：“$a\in A$ 且 $A\subset B \implies a\in B$”, 其中的 $\implies$ 就是推理语言，它代替了自然语言的 “蕴含”.

在数理逻辑中，这涉及 "语言 (language)" 和 "亚语言 (meta-language)" 的问题. 这里不可能探讨这个问题，我们只是作个注解. 但是我们会区别这些逻辑符号的这两种不同含义. 例如，后面命题 1.3.2 的 (1), 我们写成

断言 "$P \implies Q$" 等价于断言 "$(\neg Q) \implies (\neg P)$";

没有写成：

"$P \implies Q$" $\iff$ "$(\neg Q) \implies (\neg P)$".

这个写法的缺陷是，其中的 $\implies$(以及 $\neg$) 与 $\iff$ 完全处于不同的逻辑层次，前者是构成组合逻辑断言的逻辑运算，而后者是对两个组合逻辑断言的论断.

注. 在数理逻辑中，一个断言 P 通常称为一个命题； 1.3.1 中的运算就称为命题演算. 但是注意：这里 "命题" 的含义仅仅是一个逻辑断言并不意味它一定正确. 而很多数学书中的 "命题" 是指证明了正确性的断言. 本书中的 "命题" 也是这个含义，表示正确的断言；为免于混淆，我们使用 "断言" 这个词.

一个断言 P, 如断言 "$x \in A$", 不一定正确. 如果断言 P 是真的；我们就说断言 P 取值 1; 否则就说断言 P 取值 0. 断言 P 的这种取值称为 P 的 *真值*.

生活常识告诉我们，如果从断言 P, Q 合成了一个新断言，那么从断言 P, Q 的真值可以确定新断言的真值. 例如，从断言 P, Q 的真值确定断言 $P \vee Q$ 的真值如下：

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

其中前两列包括了 P, Q 的所有可能的取值情形，第三列则是 $P \vee Q$ 的相应取值：

第一行数字 $0, 0, 0$ 是说：如果 P 假， Q 假，则 $P \vee Q$ 假；

第二行数字 $0, 1, 1$ 是说：如果 P 假， Q 真，则 $P \vee Q$ 真；

第三行数字 $1, 0, 1$ 是说：如果 P 真， Q 假，则 $P \vee Q$ 真；

第四行数字 $1, 1, 1$ 是说：如果 P 真， Q 真，则 $P \vee Q$ 真.

这个表称为断言 $P \vee Q$ 的 *真值表*.

如果两个合成断言总是取同样的值，也就是说它们的真值表完全一样，我们就说这两个断言彼此等价.

1.3.2 命题. *设 P, Q 是两个断言. 那么：*

(1) *断言 "$P \implies Q$" 等价于断言 "$(\neg Q) \implies (\neg P)$".*

(2) *断言 "$\neg(P \vee Q)$" 等价于断言 "$(\neg Q) \wedge (\neg P)$".*

(3) *断言 "$\neg(P \wedge Q)$" 等价于断言 "$(\neg Q) \vee (\neg P)$".*

证. 证明结论 (1). 计算断言 "$P \implies Q$" 和断言 "$(\neg Q) \implies (\neg P)$" 的真值表如下：

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \implies Q$	$(\neg Q) \implies (\neg P)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

由于 “$P \implies Q$” 和 “$(\neg Q) \implies (\neg P)$” 的真值表完全相同，所以这两个命题等价.

另两个结论同样证明，作为习题 3. $\square$.

注. 这些结论是常识性的结论. 如 (1) 就是说： *任何命题与其逆否命题等价*. 这里是从逻辑上给以严格证明.

例. 考虑断言 “$a \in A$ 且 $b \in B$”; 由命题 1.3.2(3), 它的否定是 “$a \notin A$ 或 $b \notin B$”. 因而，如果我们要证明这样一个断言 “如果 $c \in C$, 那么 $a \in A$ 且 $b \in B$”, 按照命题 1.3.2(1), 只要证明 “如果 $a \notin A$ 或 $b \notin B$, 那么 $c \notin C$”. 实际上，这样的论证经常出现在反证法论证中.

某些断言的主语在某个范围内变动. 如， “欧氏平面上的三角形 Δ 是正三角形”, 它的主语 “三角形 Δ” 是欧氏平面上的三角形. 用 T 表示欧氏平面上的所有三角形的集合. 可以用 $P(\Delta)$ 表示这个断言 “三角形 Δ 是正三角形”, 其中主语 Δ 在 T 中跑动，而 P 表示谓语 “是正三角形”. 所以这样的主语变动的断言称为 *谓词 (predicate)*. 谓词 $P(\Delta)$ 的真值与主语 $\Delta \in T$ 有关，即 $P(\Delta)$ 是定义在 T 上取值于 $\{0, 1\}$ 的函数 (称为布尔函数).

由谓词 $P(\Delta)$ 借助于两种逻辑表达方式可以构成两个新的断言：

自然语言表达	逻辑符号表达
存在三角形 $\Delta \in T$ 使得 Δ 是正三角形.	$(\exists \Delta \in T) P(\Delta)$.
对所有 $\Delta \in T$ 有 Δ 是正三角形.	$(\forall \Delta \in T) P(\Delta)$.

这里的两个逻辑符号， “$\exists$” 称为 *存在量词*; “$\forall$” 称为 *全称量词*.

如前所说，断言不一定为真. 显然，这里前一个断言是真的，后一个断言为假.

1.3.3 小结. 一个带变动主语 x 的断言 $P(x)$ 称为一个谓词. 借助存在量词 $\exists$, 全称量词 $\forall$, 可以构成两个新断言：

$(\forall x) P(x)$. 读作： “对所有 x 有 $P(x)$”.

$(\exists x) P(x)$. 读作： “存在 x 使得 $P(x)$”.

从常识知道以下结论正确：

(1) 断言 “$\neg((\exists x) P(x))$” 等价于断言 “$(\forall x)(\neg P(x))$”;

(2) 断言 “$\neg((\forall x) P(x))$” 等价于断言 “$(\exists x)(\neg P(x))$”. $\square$

有时我们用符号 “$\exists 1$” 表示 “存在唯一”.

例. 设 A, B 是集合. 考虑断言 "如果 $A \cap B = \emptyset$, 则对所有 c 有或者 $c \notin A$ 或者 $c \notin B$". 由 1.3.1(1) 和 1.3.3(2), 知道它等价于下述断言 "如果存在 c 使得 $c \in A$ 且 $c \in B$, 则 $A \cap B \neq \emptyset$". 后者显然正确，所以我们知道前一断言是正确的.

习题 1.3

1. 写出断言 "$\neg P$" 和断言 "$P \wedge Q$" 的真值表.

2. 写出断言 "$P \implies Q$" 和断言 "$P \iff Q$" 的真值表.

3. 完成命题 1.3.2(2),(3) 的证明.

4. 设 P, Q 是断言. 证明：

(1) $P \implies Q$ 等价于 $(\neg P) \vee Q$.

(2) $\neg(P \implies Q)$ 等价于 $P \wedge (\neg Q)$.